Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Matemáticas
Nivel Superior
Prueba 2

Martes 19 de noviembre de 2019 (mañana)

Número de convocatoria del alumno

2 horas

Instrucciones para los alumnos

- Escriba su número de convocatoria en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Sección A: conteste todas las preguntas. Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto.
- Sección B: conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Escriba su número de convocatoria en la parte delantera del cuadernillo de respuestas, y adjúntelo a este cuestionario de examen y a su portada utilizando los cordeles provistos.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de Matemáticas NS y de Ampliación de Matemáticas NS** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[100 puntos]**.

8819 – 7226

No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente el mismo como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

Sección A

Conteste **todas** las preguntas. Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto. De ser necesario, se puede continuar desarrollando la respuesta en el espacio que queda debajo de las líneas.

1. [Puntuación máxima: 5]

Sea una progresión geométrica donde $u_4 = -70$ y $u_7 = 8,75$. Halle el segundo término de la progresión.

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

2. [Puntuación máxima: 6]

El número de maratones que Audrey corre cada año se puede modelizar mediante una distribución de Poisson de media $1,3$.

(a) Calcule la probabilidad de que Audrey corra al menos dos maratones en un determinado año. [2]

(b) Halle la probabilidad de que corra al menos dos maratones al año en exactamente cuatro de los próximos cinco años. [4]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

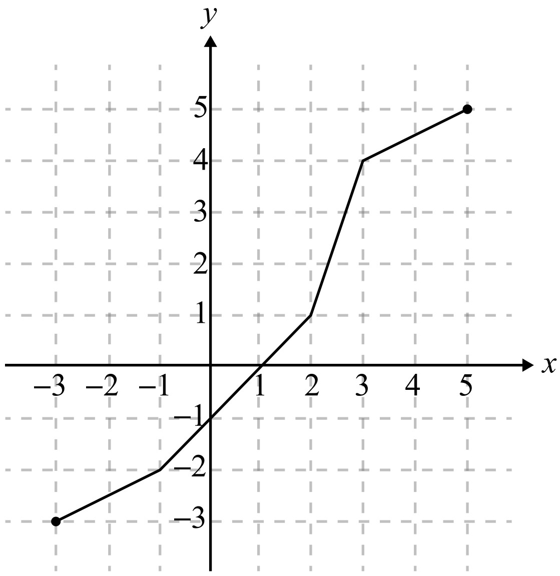
. . . .

. . . .

. . . .

3. [Puntuación máxima: 6]

La siguiente figura muestra el gráfico de $y = f(x)$, $-3 \le x \le 5$.



(a) Halle el valor de $(f \circ f)(1)$. [2]

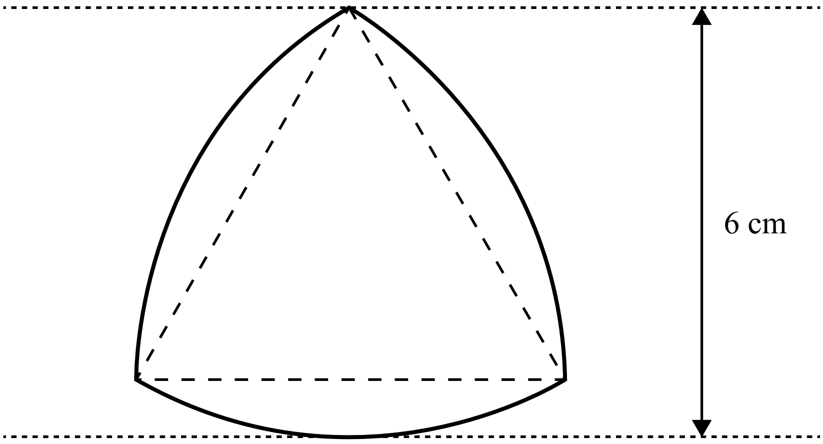
(b) Sabiendo que $f^{-1}(a) = 3$, determine el valor de a. [2]

(c) Sabiendo que $g(x) = 2f(x-1)$, halle el dominio y el recorrido de g. [2]

4. [Puntuación máxima: 7]

La siguiente forma geométrica consta de tres arcos de circunferencia, cada uno con centro en el vértice opuesto de un triángulo equilátero, tal y como se muestra en la figura.

la figura no está dibujada a escala



Para esta forma geométrica, calcule

(a) el perímetro; [2]

(b) el área. [5]

5. [Puntuación máxima: 6]

Considere el desarrollo de $(2+x)^n$, donde $n \geq 3$ y $n \in \mathbb{Z}$.

El coeficiente de x^3 es cuatro veces mayor que el coeficiente de x^2. Halle el valor de n.

6. [Puntuación máxima: 6]

Sea $P(z) = az^3 - 37z^2 + 66z - 10$, donde $z \in \mathbb{C}$ y $a \in \mathbb{Z}$.

Una de las raíces de $P(z) = 0$ es $3 + \mathrm{i}$. Halle el valor de a.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

7. [Puntuación máxima: 6]

Las mejores marcas de la temporada logradas por los corredores de un equipo de atletismo en los $100\,\mathrm{m}$ lisos siguen una distribución normal de media $11{,}6$ segundos y desviación típica $0{,}8$ segundos. Para clasificarse para una competición dada, los corredores necesitan que su mejor marca de la temporada sea inferior a 11 segundos. Se elige al azar a uno de los corredores de este equipo que se han clasificado para la competición. Halle la probabilidad de que su mejor marca de la temporada sea inferior a $10{,}7$ segundos.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

8. [Puntuación máxima: 8]

Ocho chicos y dos chicas están sentados en un banco. Determine el número de disposiciones posibles, sabiendo que

(a) las chicas no se sientan juntas; [3]

(b) las chicas no se sientan en ninguno de los dos extremos; [2]

(c) las chicas no se sientan en ninguno de los dos extremos y tampoco se sientan juntas. [3]

No escriba soluciones en esta página.

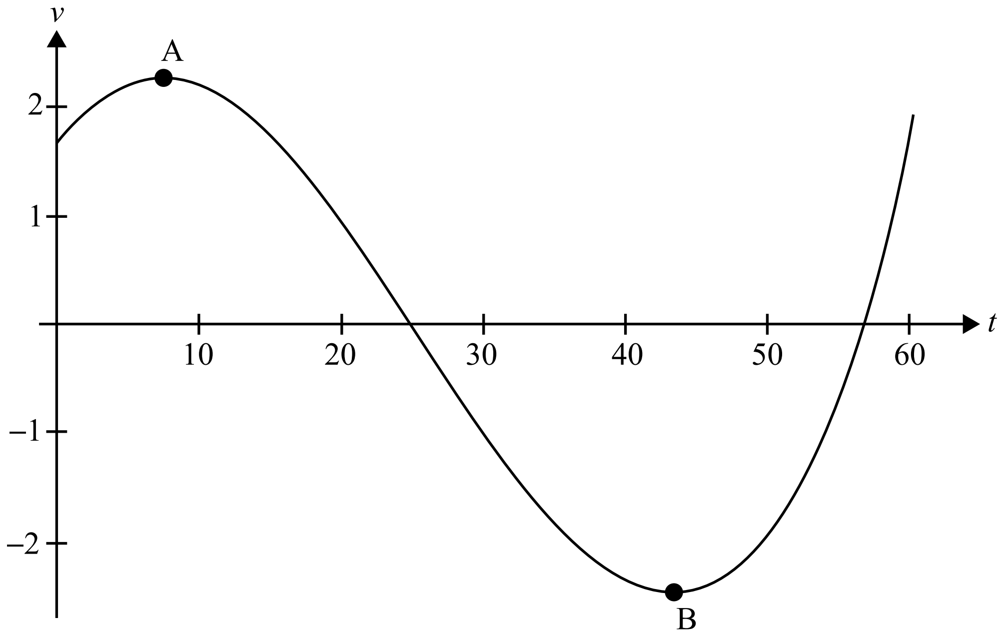
Sección B

Conteste **todas** las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Empiece una página nueva para cada respuesta.

9. [Puntuación máxima: 14]

Un cuerpo se mueve en línea recta, de modo tal que su velocidad $v\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ después de t segundos viene dada por $v = 2\,\mathrm{sen}\left(\frac{t}{10}+\frac{\pi}{5}\right)\csc\left(\frac{t}{30}+\frac{\pi}{4}\right)$ para $0 \le t \le 60$.

La siguiente figura muestra el gráfico de v en función de t. El punto A es un máximo local y el punto B es un mínimo local.



(a) (i) Determine las coordenadas del punto A y las coordenadas del punto B.

(ii) A partir de lo anterior, escriba la velocidad máxima que alcanza el cuerpo. [5]

(b) El cuerpo se detiene por primera vez en el instante $t = t_1$. Halle

(i) el valor de t_1;

(ii) la distancia que ha recorrido entre $t = 0$ y $t = t_1$;

(iii) la aceleración en el instante $t = t_1$. [6]

(c) Halle la distancia que ha recorrido en los primeros 30 segundos. [3]

No escriba soluciones en esta página.

10. [Puntuación máxima: 19]

La variable aleatoria X tiene la siguiente función de densidad de probabilidad:

$$f(x)=\begin{cases} 3a & , \quad 0 \le x < 2 \\ a(x-5)(1-x) & , \quad 2 \le x \le b \\ 0 & , \quad \text{resto de valores} \end{cases} \qquad a, b \in \mathbb{R}^{+}, 3 < b \le 5.$$

(a) Halle, en función de a, la probabilidad de que X esté comprendida entre 1 y 3. [4]

Considere el caso en que $b = 5$.

(b) Dibuje aproximadamente el gráfico de f. Indique las coordenadas de los extremos de cada tramo y de cualquier máximo o mínimo local; dé las respuestas en función de a. [4]

(c) Halle el valor de

(i) a;

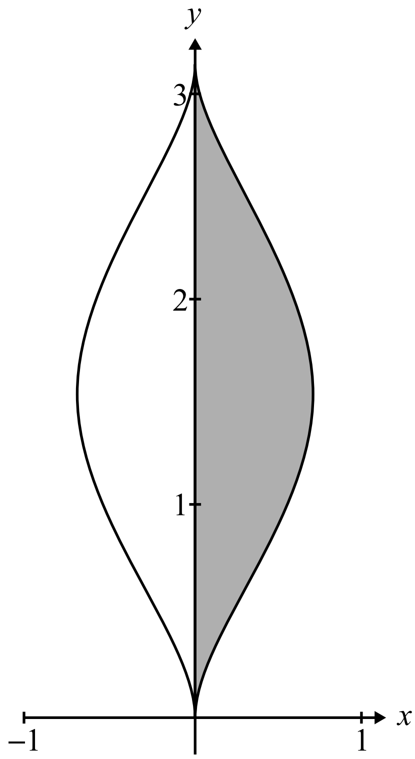
(ii) $\mathrm{E}(X)$;

(iii) la mediana de X. [11]

No escriba soluciones en esta página.

11. [Puntuación máxima: 17]

La siguiente figura muestra una parte del gráfico de $2x^2 = \operatorname{sen}^3 y$ para $0 \le y \le \pi$.



(a) (i) Utilizando la derivación implícita, halle una expresión para $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

(ii) Halle la ecuación de la tangente a la curva en el punto $\left(\frac{1}{4}, \frac{5\pi}{6}\right)$. [8]

La región sombreada R está delimitada por la curva, el eje y y las rectas $y = 0$ e $y = \pi$.

(b) Halle el área de R. [3]

Ahora se rota la región R 2π radianes alrededor del eje y para generar un sólido.

(c) Escribiendo $\operatorname{sen}^3 y$ como $(1 - \cos^2 y)\operatorname{sen} y$, muestre que el volumen del sólido así generado es igual a $\frac{2\pi}{3}$. [6]